1) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x}$.

Označme $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

hledáme řešení def. na $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

Řešíme homogenní rovnici, char. pol. je

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Dostáváme FS $\{e^x, xe^x\}$.

$\frac{e^x}{x}$ není speciální pravá strana. Použijeme variaci konstant.

Hledáme řešení tvaru

$$y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x.$$

Pak

$$y'(x) = \underbrace{C_1'(x)\, e^x + C_2'(x)\, x e^x}_{=0} + C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, e^x (x+1)$$

položím

$$y''(x) = C_1'(x)\, e^x + C_2'(x)\, e^x (x+1) + C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, e^x (x+2)$$

Dosazením do rovnice dostávám

$$C_1'(x)\, e^x + C_2'(x)\, e^x (x+1) = \frac{e^x}{x}$$

Dostávám soustavu

$$C_1'(x)\, e^x + C_2'(x)\, x e^x = 0$$

$$C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^x (x+1) = \frac{e^x}{x}$$

$$C_2'(x)\, e^x = \frac{e^x}{x}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{x}$$

$$C_1'(x) = -1$$

Tedy $\quad c_2(x) = \log|x|, \quad c_1(x) = -x.$

Obecné řešení je:

$$y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x + D_1e^x + D_2xe^x,$$

$$D_1, D_2 \in \mathbb{R}$$

$$= -xe^x + \log|x|\,xe^x + D_1e^x + D_2xe^x,$$

$x \in (0,\infty), (-\infty,0).$

2) $y''(x) + y(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

$f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Hledáme řeš. def. na $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Char. pol. homogenní rovnice je

$$\lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$$

Dostáváme FS $\{\sin(x), \cos(x)\}$

$\frac{1}{\sin(x)}$ není ve spec. tvaru, hledáme

řešení tvaru

$$y(x) = c_1(x)\sin(x) + c_2(x)\cos(x)$$

pak

$$y'(x) = \underbrace{c_1'(x)\sin(x) + c_2'(x)\cos(x)}_{=0} + c_1(x)\cos(x) - c_2(x)\sin(x)$$

$$y''(x) = \underbrace{C_1'(x)\cos(x) - C_2'(x)\sin(x)}_{= \frac{1}{\sin(x)}} - C_1(x)\sin(x) - C_2(x)\cos(x)$$

Dostávám soustavu

$$C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x) = 0$$

$$C_1'(x)\cos(x) - C_2'(x)\sin(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

Nemusí být ekvivalentní!

!

$\left(-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)\cdot$

$$C_1'(x)\left(-\sin(x) - \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$C_2'(x)\left(-\frac{1}{\sin(x)}\right)=\frac{1}{\sin(x)}$$

$$C_2'(x)=-1$$

$$C_1'(x)\sin(x)-\cos(x)=0$$

$$C_1'(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Tedy $C_2(x)=-x$, $C_1(x)\overset{c}{=}\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx=\left|\begin{array}{l}t=\sin(x)\\ dt=\cos(x)\,dx\end{array}\right|$

$$=\int\frac{1}{t}\,dt\overset{c}{=}\log|\sin(x)|$$

Obecné řešení:

! je třeba udělit zkonstn!

$$y(x) = \log|\sin(x)| \sin(x) - x\cos(x) + D_1 \sin(x) + D_2 \cos(x),$$

$$D_1, D_2 \in \mathbb{R}$$

$$x \in (k\pi, (k+1)\pi), \; k \in \mathbb{Z}$$

3) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

$f(x) = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$, $D_f = (-1, \infty)$

Char. pol. homogenní rovnice:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

Dostávám FS $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$

$3e^{-x}\sqrt{x+1}$ není ve speciálním tvaru.

Hledám řešení ve tvaru

$$y(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$$

Pak

$$y'(x) = \underbrace{C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x}}_{=0} - C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-x}(1-x)$$

$$y''(x) = \underbrace{-C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-x}(1-x)}_{=3e^{-x}\sqrt{x+1}} + C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-x}(x-2)$$

Dostávám soustavu:

$$C_1'(x)\,e^{-x} + C_2'(x)\,x e^{-x} = 0$$

$$-C_1'(x)\,e^{-x} + C_2'(x)\,e^{-x}(1-x) = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$$

$$C_2'(x)\,e^{-x} = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$$

$$C_2'(x) = 3\sqrt{x+1}$$

$$C_1'(x) = -3x\sqrt{x+1}$$

Tedy $c_2(x) = 2(x+1)^{3/2}$

$$c_1(x) \overset{c}{=} \int -3x\sqrt{x+1}\,dx \overset{P.P.}{=} -3x\,\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} -$$

$$\int -2(x+1)^{3/2}\,dx \overset{c}{=} 2\cdot(x+1)^{5/2}\cdot\frac{2}{5} - 2x(x+1)^{3/2}$$

Obecné řešení je

$$y(x) = \left(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} - 2x(x+1)^{3/2}\right)e^{-x} + 2(x+1)^{3/2}xe^{-x}$$
$$+ D_1e^{-x} + D_1xe^{-x}$$

$D_1, D_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in (-1, \infty)$

4) $y''(x) + y(x) = \sin^2(x)$

$f(x) = \sin^2(x)$, $D_f = \mathbb{R}$

Char. pol. homogenní rovnice je

$\lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$,

Dostáváme FS $\{\sin(x), \cos(x)\}$

$\sin^2(x)$ není spec. tvaru.

Hledáme řešení tvaru

$$y(x) = C_1(x)\sin(x) + C_2(x)\cos(x)$$

$$y'(x) = \underbrace{C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x)}_{=0} + C_1(x)\cos(x) - C_2(x)\sin(x)$$

položíme

$$y''(x) = \underbrace{C_1'(x)\cos(x) - C_2'(x)\sin(x)}_{=\sin^2(x)} - C_1(x)\sin - C_2(x)\cos(x$$

z rovnice

Dostáváme soustavu

$$C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x) = 0 \quad \Big| \cdot \left(-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)$$

$$C_1'(x)\cos(x) - C_2'(x)\sin(x) = \sin^2(x)$$

$$C_2'(x)\left(-\sin(x) - \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right) = \sin^2(x)$$

! Není vždy definováno

!
$$C_2'(x) = -\sin^3(x)$$

! $$C_1'(x) = \sin^2(x)\cos(x)$$

$$C_1(x) \overset{c}{=} \int \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin(x) \\ dt = \cos(x)\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \int t^2\,dt \overset{c}{=} \frac{1}{3}\sin^3(x)$$

$$C_2(x) \overset{c}{=} \int -\sin^3(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x)\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \int 1 - t^2\,dt \overset{c}{=} \cos(x) - \frac{1}{3}\cos^3(x)$$

Dostávám kandidáta na partikulární řešení

$$y(x) = \frac{\sin^4(x)}{3} + \cos^2(x) - \frac{\cos^4(x)}{3}$$

$$y'(x) = \frac{4}{3}\sin^3(x)\cos(x) - 2\cos(x)\sin(x) + \frac{4}{3}\cos^3(x)\sin(x)$$

$$y''(x) = \cancel{4\sin^2(x)\cos^2(x)} - \frac{4}{3}\sin^4(x) + 2\sin^2(x) - 2\cos^2(x) - \cancel{4\cos^2(x)\sin^2(x)} + \frac{4}{3}\cos^4(x)$$

Dosadím do rovnice:

$$\sin^2(x) \overset{?}{=} -\frac{4}{3}\sin^4(x) + 2\sin^2(x) - 2\cos^2(x) + \frac{4}{3}\cos^4(x)$$

$$\frac{1}{3}\sin^4(x) + \cos^2(x) - \frac{\cos^4(x)}{3} =$$

$$= \cos^4(x) - \sin^4(x) - \cos^2(x) + 2\sin^2(x) =$$

$$= \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)\underbrace{\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)}_{=1} - \cos^2(x) + 2\sin^2(x)$$

$$= \sin^2(x)$$

Dostáváme obecné řešení

$$y(x) = \frac{\sin^4(x)}{3} + \cos^2(x) - \frac{\cos^4(x)}{3} + D_1 \sin(x) + D_2 \cos(x),$$

$$D_1, D_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$